De vruchten van een hype: nieuwe en onmogelijke Franklin vierkanten

Arno van den Essen

June 1, 2007

De recente hype rond het zogenaamde HSA-vierkant heeft in Nederland een ware magische vierkantenrage op gang gebracht. In dit artikel zullen de opmerkelijke resultaten van deze zoektocht besproken worden. Hoofdrolspelers zijn de wiskundige Cor Hurkens van de TU Eindhoven en elekrotechnisch ingenieur Huub Reijnders uit Nijmegen.

Opzoek naar een 12×12 Franklin vierkant

Sinds de publikatie van het 12×12 HSA-vierkant is er een grote zoektocht naar het ontbrekende Franklin vierkant gestart. Ter herinnerring het HSA-vierkant is een 12×12 vierkant waarin de getallen 1,2,3,..., 144 zo gerangschikt zijn dat ze aan de volgende drie voorwaarden voldoen.
1) De som van alle getallen in ieder 2×2 deelvierkant is gelijk aan 290.
2) De som van alle getallen op alle parallelle gebogen diagonalen is gelijk aan 870 en
3) de som van alle getallen in iedere eenderde rij en iedere eenderde kolom (vanaf de rand gerekend) is gelijk aan 290.

Het vierkant waarnaar de middelbare scholieren Petra, Jesse en Willem oorpronkelijk opzoek waren was een zogenaamd zuiver magisch 12×12 *Franklin vierkant*, met andere woorden een vierkant bestaande uit de getallen 1,2,3,..., 144 dat voldoet aan de voorwaarden 1) en 2) als boven, maar dat in plaats van aan 3) aan de volgende voorwaarde voldoet
3*) De som van alle getallen in iedere *halve* rij en iedere *halve* kolom (vanaf

de rand gerekend) is gelijk aan 435. Al sinds geruime tijd wordt er naar zo'n vierkant gezocht.

Waarom is er zo'n interesse naar een 12×12 *zuiver Franklin magisch vierkant?*

Wiskundigen vroegen zich af *voor welke afmetingen* er Franklin vierkanten bestaan, met andere woorden voor welke afmetingen bestaan er vierkanten bestaande uit de getallen $1, 2, 3, \ldots$ die aan de voorwaarden 1), 2) en 3*) voldoen, de zogenaamde *Franklin voorwaarden*. Franklin zelf maakte als eerste zulke vierkanten van 8×8 en 16×16. In mijn boek [1] beschreef ik een methode om willekeurig grote Franklin vierkanten te maken, zolang de afmeting van het vierkant maar een veelvoud van acht is. Dus ook voor de afmetingen 24×24, 32×32, 40×40 enzovoorts zijn Franklin magische vierkanten eenvoudig te maken.

Verder moet de afmeting n van een Franklin vierkant (ook wel de *orde* van het vierkant genoemd) natuurlijk een even getal zijn, anders kun je niet over "halve kolom" spreken, maar n moet zelfs een *veelvoud van vier* zijn. Dit zien we alsvolgt in: de som van alle getallen in het vierkant is $1+2+3+\ldots+n^2 = \frac{1}{2}n^2(n^2+1)$. De som van een rij is daarvan dan het n-de deel, dus is gelijk aan $\frac{1}{2}n(n^2+1)$ (er zijn immers n rijen en die moeten allen dezelfde som hebben). Een halve rij heeft dus als som $\frac{1}{4}n(n^2+1)$. Omdat n even is, is n^2+1 oneven en omdat $\frac{1}{4}n(n^2+1)$ een geheel getal is moet dan dat n een viervoud zijn.

Franklin vierkanten zouden dus ten hoogste kunnen bestaan voor $n = 4, 8, 12, 16$ enzovoorts. Maar bestaat er ook voor ieder van deze afmetingen een zuiver Franklin magisch vierkant?

Om te beginnen kan men met wat puzzelen inzien dat er geen 4×4 Franklin vierkanten bestaan, de afmeting is eenvoudigweg te klein. Verder bestaat er een 8×8 Franklin vierkant en, zoals eerder opgemerkt, bestaan ze ook voor alle afmetingen die een veelvoud van acht zijn. De vraag die dan overblijft is: bestaan er voor $n = 12, 20, 28, 36, \ldots$, met andere woorden voor alle viervouden groter dan acht die geen achtvoud zijn, een Franklin vierkant van die grootte? Het eerste probleem is dus: bestaat er een 12×12 Franklin magisch vierkant?

De zoektocht van Cor Hurkens

Nadat op 22 maart 2007 de mediahype was uitgebroken rond het 12×12 vierkant, dat net niet het gezochte 12×12 Franklin vierkant was, begonnen veel amateurwiskundigen, maar ook beroepswiskundigen zo'n vierkant te zoeken. Een van die wiskundigen was Cor Hurkens van de TU Eindhoven. Hij realiseerde zich dat het met brute kracht uitrekenen van alle mogelijkheden voor een 12×12 Franklin vierkant te lang zou duren. Hij voerde daarom eerst een aantal vereenvoudigingen uit waardoor de rekentijd drastisch beperkt zou worden.

Om te beginnen merkte hij op dat het vierkant helemaal vast ligt als je zijn eerste kolom en zijn eerste rij kent. Immers door de eerste Franklin eigenschap ligt dan ook de tweede kolom vast (begin bovenaan en werk naar beneden). Vervolgens kun je met deze tweede kolom en het derde getal uit de bovenste rij dan weer de derde kolom berekenen enzovoorts.

Omdat het Franklin vierkant helemaal bepaald is door zijn eerste rij en kolom, moet het dan mogelijk zijn de tweede en derde Franklin eigenschap te *vertalen* in eigenschappen van die eerste rij en kolom. Met wat eenvoudig optellen en aftrekken blijkt de tweede Franklin voorwaarde, die over de gebogen diagonalen gaat, precies neer te komen op de zogenaamde *alternerende som eigenschap*, die inhoudt dat de som van de getallen op de *oneven* plaatsen in de eerste helft van de eerste rij gelijk is aan de som van de getallen op de *oneven* plaatsen in de tweede helft van de eerste rij en net zo voor de getallen in de eerste kolom.

Ook vanwege de eerste Franklin voorwaarde komt de derde Franklin voorwaarde (3*) neer op de eigenschap dat de som van alle getallen in de eerste helft van de eerste rij gelijk is aan die van de tweede helft van de eerste rij en dat deze uitkomst gelijk is aan de som der getallen in de eerste helft van de eerste kolom en aan die van de tweede helft van de eerste kolom.

Vervolgens maakte Hurkens nog een aantal vereenvoudigingen. Uiteindelijk bleven er zo'n zeventig gevallen over die onderzocht moesten worden, waarvan er twintig eenvoudig op te lossen waren. Hij schreef een een C-programma van zo'n 600 regels en schakelde toen zo'n 50 DELL computers in om het lang gezochte Franklin vierkant op te sporen.

Op vrijdag 27 April, 2007 werden om 18.00 uur alle computers gestart en na zo'n andere halve dag rekenen waren ze op zondagmorgen 29 April, 02.42 uur allemaal klaar. Toen Hurkens om 8 uur zondagmorgen ging kijken of er een 12x12 Franklin vierkant bijzat, zag hij tot zijn verbazing dat geen van de 50 computers er een gevonden had. Vervolgens heeft hij een aantal verfijningen in zijn computerprogramma aangebracht met als resultaat dat bij een tweede run de computertijd was teruggebracht tot een totaal van 160 uur. Het eindresultaat was hetzelfde: het lang gezochte 12×12 Franklin vierkant bestaat niet!

Natuurlijk riep deze ontdekking weer een nieuwe vraag op: bestaan er wel 20×20 Franklin vierkanten of zouden die ook niet mogelijk zijn?

En toen kwam Huub Reijnders

Terwijl Cor Hurkens in Eindhoven zijn wiskundige vereenvoudigingen bedacht en zijn computers aan het werk zette, was in Malden een plaatsje zo'n vier kilometer van Nijmegen, de elektrotechnisch Ingenieur Huub Reijnders met pen en papier op zoek naar het 12×12 vierkant, natuurlijk ook uitgedaagd door de publiciteit rond het HSA-vierkant.

Hij puzzelde menig avondje in de vrije uurtjes na zijn werk, maar het lukte hem maar niet om een 12×12 Franklin vierkant te maken. Op 23 april merkte hij echter op dat het met zijn methode wel mogelijk moest zijn een 20×20 vierkant te produceren. Hij schreef een computerprogramma waarmee hij de door hem gemaakte vierkanten kon controleren. Op 30 april werd het eerste 20×20 vierkant gevonden. Omdat het te groot is om hier af te drukken en het zoals eerder opgemerkt toch al helemaal vastligt door zijn eerste rij en kolom, volstaat het alleen de cijfers van deze rij en kolom te geven.

De eerste rij van het vierkant bevat van links naar rechts de getallen 1,398,2,397,11,396,12,388,14,386,15,387,13,389,5,390,4,399,3, 400 en de eerste kolom bevat van boven naar beneden de getallen 1,395,61,335,81, 315,221,200, 121,275,141,255,181,240,101,295,41,355,21,375.

Hiermee was, voorzover bekend het eerste 20×20 Franklin magisch vierkant ontdekt! Met de methode van Huub Reijnders bleek het ook mogelijk alle andere missende Franklin vierkanten te maken, met andere woorden een 28×28, een 36×36 enzovoorts.

Samengevat zuivere $n \times n$ Franklin magische vierkanten bestaan precies dan als n een viervoud is, behalve als $n = 4$ of $n = 12$.

Het vermoeden van Euler

In 1776 schreef de beroemde Zwitserse wiskundige Leonhard Euler (1707-1783) een artikel waarin hij een methode uiteenzette om "gewone"zuiver magische vierkanten van willekeurige afmeting te maken (een *magisch vierkant* *van orde* n is een $n \times n$ getallenvierkant waarin de getallen $1, 2, 3, \ldots$ zo gerangschikt zijn dat de som van alle getallen in iedere rij, iedere kolom en op ieder van de twee diagonalen hetzelfde is).

Hij voerde daarvoor de zogenaamde Latijnse vierkanten in, de voorlopers van onze Suduku's: een *Latijns vierkant van orde* n is een getallen vierkant waarin de getallen $1, 2, 3, \ldots, n$ zo geranschikt zijn dat deze getallen in iedere rij en iedere kolom precies één keer voorkomen. Zoals gezegd is een Sudoku een voorbeeld van een Latijns vierkant van orde 9, namelijk eentje met nog wat extra eisen op de 3×3 deelvierkantjes.

Om zuiver magische vierkanten te maken gebruikte Euler twee zogenaamde orthogonale Latijnse vierkanten: twee Latijnse vierkanten N en M van dezelfde afmeting heten *orthogonaal* als het vierkant der paren, dat ontstaat als je beide vierkanten op elkaar legt, uitsluitend *verschillende* paren heeft. Bijvoorbeeld de volgende twee Latijnse vierkanten zijn orthogonaal

$$N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad M = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

immers de paren in het vierkant

$$N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline (2,1) & (0,0 & (1,2) \\ \hline (0,2) & (1,1) & (2,0) \\ \hline (1,0) & (2,2) & (0,1) \\ \hline \end{array}$$

zijn allemaal verschillend.

Vorm vervolgens het vierkant $3 \times N + M$ en tel bij alle getallen uit het vierkant 1 op. Je krijgt dan onderstaand zuiver magische vierkant van orde 3 (de zojuist geschetste methode staat uitgelegd in hoofdstuk 4 van [1])

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 1 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 4 & 9 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Om aan te tonen dat deze methode voor alle afmetingen zuiver magische vierkanten oplevert, moest Euler laten zien dat er voor iedere afmeting n paren orthogonale Latijnse vierkanten van orde n bestaan. Voor $n = 2$ zijn er maar twee Latijnse vierkanten en deze zijn niet orthogonaal, echter voor $n = 3$ bestaat er wel zo'n paar, zoals hierboven is aangetoond. Ook voor $n = 4$ en $n = 5$ kon Euler gemakkelijk zulke paren vinden, dat lukte hem voor bijna alle n. Alleen voor $n = 6, 10, 14, 18, \ldots$ slaagde hij daar niet in en formuleerde daarom in 1782 het vermoeden dat voor deze waarden van n er ook geen orthogonale paren bestaan.

In 1900 toonde Gaston Tarry aan dat voor $n = 6$ Euler gelijk had, hij deed dit door alle gevallen (op een slimme manier) na te gaan. Voor grotere afmetingen was Tarry's methode ondoenlijk, zeker in die tijd toen er nog geen computers waren. Het duurde dan ook nog zo'n zestig jaar voordat Eulers vermoeden gekraakt werd: in 1959 slaagden de drie wiskundigen Parker, Shrikhande en Bose erin aan te tonen dat Euler voor alle andere waarden van n ongelijk had: voor $n = 10, 14, 18, \ldots$ bleken er wel degelijk paren orthogonale Latijnse vierkanten te bestaan.

Samengevat voor alle waarden van n groter dan 1 bestaan er paren orthogonale Latijnse vierkanten van orde n, behalve voor $n = 2$ en $n = 6$. Bovendien bleek het voor de gevallen $n = 10, 14, 18, \ldots$ moeilijker om zulke paren te vinden.

Het zal de lezer nu misschien zijn opgevallen dat de waarden 2 en 6 precies corresponderen met de waarden 4 en 12 waarvoor geen Franklin vierkanten bestaan. Bovendien corresponderen de "moeilijke" door Parker, Shrikhande en Bose opgeloste gevallen $10, 14, 18, \ldots$ precies met de moeilijke, door Huub Reijnders opgeloste afmetingen $20, 28, 36, \ldots$ van de Franklin vierkanten. Is dit toeval of zou er een *verband zijn tussen het bestaan van paren orthogonale Latijnse vierkanten van orde n en het bestaan van Franklin vierkanten van orde $2n$?*

Het lijkt mij interessant dit probleem nader te onderzoeken omdat Latijnse vierkanten in allerlei toepassingen een grote rol spelen, zoals in de crytografie, de codetheorie, bij het bepalen van de structuur van het DNA, het ontwerpen van chips voor computers, enzovoorts. Als namelijk bovenstaand verband kan worden aangetoond zou er via deze weg wellicht een nieuwe methode zijn om paren orthogonale Latijnse vierkanten te maken.

[1] Arno van den Essen, *Magische Vierkanten, Van Lo-Shu tot sudoku*, 2e druk (Maart 2007), Veen Magazines.